

Effiziente Algorithmen I

10. Übungsblatt WS 08/09

Abgabetermin: 14.1.2008

Aufgabe 37

Bestimmen Sie mit der Stepping-Stone-Methode einen Transportplan mit minimalen Kosten für das klassische Transportproblem mit folgenden Eingabedaten: Der Angebotsvektor laute $(9, 4, 8)$, der Bedarfsvektor $(3, 5, 4, 6, 3)$ und die Kostenmatrix sei

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 9 & 10 \\ 2 & 10 & 8 & 30 & 6 \\ 1 & 20 & 7 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie die Startlösung mit der Nordwestecken-Regel.

Aufgabe 38

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Durch Multiplikation der Zeilen und Spalten von A mit Skalierungsfaktoren $r \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ entsteht eine Matrix $A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit den Einträgen $a'_{ij} = r_i \cdot a_{ij} \cdot c_j$. Gesucht sind Skalierungsfaktoren, die eine Optimallösung des Problems

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{\substack{i,j \\ a_{ij} \neq 0}} \log |r_i \cdot a_{ij} \cdot c_j| \\ & |r_i \cdot a_{ij} \cdot c_j| \leq 1, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

sind. Dadurch werden die Einträge der Matrix so ins Intervall $[-1, 1]$ abgebildet, dass die von 0 verschiedenen „möglichst nah“ an -1 oder 1 liegen. Zeigen Sie, dass sich das Problem mit Hilfe eines Transportproblems lösen lässt. Formulieren Sie es dazu als Lineares Programm und betrachten Sie das dazu duale Problem.

Aufgabe 39

Ein Reiseveranstalter besitzt ein Flugzeug, das maximal p Personen aufnehmen kann. Der Veranstalter bietet einen Flug mit Zwischenstops an, der in Stadt 1 beginnt und dann die Städte $2, 3, \dots, n$ in dieser Reihenfolge anfliegt. Das Flugzeug kann in jeder dieser Städte Passagiere aufnehmen und sie dann in jeder anderen Stadt wieder absetzen. Sei b_{ij} die Anzahl der Personen, die von Stadt i nach Stadt j fliegen möchten, und f_{ij} der Flugpreis, den eine Person zahlen muss, um von i nach j zu gelangen. Der Reiseveranstalter möchte bestimmen, wie viele Passagiere zwischen den verschiedenen Städten befördert werden müssen, damit seine Einnahmen maximal sind. Formulieren Sie dieses Problem als Netzwerkflussproblem.

Aufgabe 40

Welche der folgenden Probleme lassen sich mit Hilfe eines Minimale-Kosten-Fluss-Algorithmus lösen? Geben Sie gegebenenfalls eine geeignete Transformation an.

- Bestimmung eines maximalen (s, t) -Flusses
- Bestimmung eines global minimalen Schnitts
- Bestimmung eines Kreises mit bestem Kosten-Zeit-Verhältnis
- Bestimmung von kürzesten Wegen von einem festen Startknoten aus
- Bestimmung eines minimal aufspannenden Baums