H

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

10. Präsenzaufgabenblatt, Wintersemester 2015/16
Übungstunde am 18.01.2015

Aufgabe Q

Ein Reiseveranstalter besitzt ein Flugzeug, das maximal p Personen aufnehmen kann. Der Veranstalter bietet einen Flug mit Zwischenstops an, der in Stadt 1 beginnt und dann die Städte $2, 3, \ldots, n$ in dieser Reihenfolge anfliegt. Das Flugzeug kann in jeder dieser Städte Passagiere aufnehmen und sie dann in jeder anderen Stadt wieder absetzen. Sei b_{ij} die Anzahl der Personen, die von Stadt i nach Stadt j fliegen möchten, und f_{ij} der Flugpreis, den eine Person zahlen muss, um von i nach j zu gelangen. Der Reiseveranstalter möchte bestimmen, wie viele Passagiere zwischen den verschiedenen Städten befördert werden müssen, damit seine Einnahmen maximal sind. Formulieren Sie dieses Problem als Netzwerkflussproblem.

Aufgabe R

Wie lassen sich die folgenden Probleme mit Hilfe eines Minimale-Kosten-Fluss-Algorithmus lösen?

a) Bestimmung eines maximalen (s, t)-Flusses,

b) Bestimmung eines global minimalen Schnitts,

c) Bestimmung eines Kreises mit bestem Kosten-Zeit-Verhältnis,

d) Bestimmung von kürzesten Wegen von einem festen Startknoten aus.

G

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

9. Präsenzaufgabenblatt, Wintersemester 2015/16
Übungstunde am 21.12.2015

Aufgabe P

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten und Kantengewichten c_e für alle $e \in E$.

a) Zeigen Sie mithilfe des Satzes 7.4, dass G höchstens $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ minimale Schnitte besitzt.

b) Geben Sie für jede Knotenzahl $n \geq 2$ einen Graphen an, für den dieser Wert exakt angenommen wird.

H

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

8. Präsenzaufgabenblatt, Wintersemester 2015/16
Übungstunde am 14.12.2015

Aufgabe O (Minimale Flüsse)

Gegeben sei ein Digraph $D = (V, A)$, zwei Knoten $s, t \in V$ sowie Mindestflüsse $l(u, v)$ für alle $(u, v) \in A$. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der einen minimalen s-t-Fluss bestimmt und beweisen Sie seine Korrektheit.

G

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

7. Präsenzaufgabenblatt, Wintersemester 2015/16
Übungstunde am 7.12.2015

Aufgabe N (Unbeschränkte Kapazitäten)

Gegeben sei ein Netzwerk, das zwar Kanten mit unbeschränkter Kapazität aber keinen Weg von Quelle nach Senke mit unbeschränkter Kapazität enthält. Sei A' die Menge der Kanten mit endlicher Kapazität. Zeigen Sie, dass man die Kapazitäten aller unbeschränkter Kanten durch einen endlichen Wert ersetzen kann, ohne den Wert des maximalen Flusses zu verändern.

F

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

6. Präsenzaufgabenblatt, Wintersemester 2015/16
Übungstunde am 30.11.2015

Aufgabe L (Flüsse und Matchings)

Gegeben sei ein ungewichteter bipartiter Graph $G = (V, E)$ mit Partitionsmengen V_1 und V_2. Beschreiben Sie, wie ein Algorithmus zur Berechnung maximaler Flüsse dazu verwendet werden kann, ein kardinalitätsmaximales Matching in G zu bestimmen.

Aufgabe M (Gerade und ungerade Flüsse)

Ein Fluss f zu einem Netzwerk $D = (V, A)$ heißt *gerade* (bzw. *ungerade*), falls $f(u, v)$ für alle $(u, v) \in A$ gerade (bzw. ungerade) ist. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Sind alle Kantenkapazitäten von D gerade, so existiert ein gerader maximaler Fluss.

b) Sind alle Kantenkapazitäten von D ungerade, so existiert ein ungerader maximaler Fluss.

E

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

5. Präsenzaufgabenblatt, Wintersemester 2015/16
Übungstunde am 23.11.2015

Aufgabe J (Flugplanerstellung als Zuordnungsproblem)

Eine Fluglinie möchte p Flüge anbieten, dabei aber mit möglichst wenigen Flugzeugen auskommen. Die Start- und Landezeiten von Flug i seien gegeben durch a_i bzw. b_i. Inklusive aller notwendigen Arbeiten benötigt ein Flugzeug die Zeit r_{ij}, um vom Zielort des Fluges i zum Startort des Fluges j zu gelangen. Formulieren Sie das Problem der Fluglinie als Zuordnungsproblem.

Aufgabe K (Ungarische Methode zur Maximierung)

Modifizieren Sie die Ungarische Methode so, dass sie zur Bestimmung einer Zuordnung mit *maximalem* Gesamtgewicht verwendet werden kann. Verändern Sie dabei weder die Input-Kostenmatrix C (mit nicht-negativen Einträgen) noch die Definition der reduzierten Matrix $\overline{C}$.

D

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

4. Präsenzaufgabenblatt, Wintersemester 2015/16
Übungstunde am 16.11.2015

Aufgabe H (LP-Modellierung)

Formulieren Sie die folgenden Probleme aus der Vorlesung als lineare Programme. Sie können dabei für die Variablen fordern, nur ganzzahlige Werte annehmen zu dürfen.

a) Minimaler-aufspannender-Baum-Problem

b) Symmetrisches Traveling-Salesman-Problem

c) Asymmetrisches Traveling-Salesman-Problem

Aufgabe I (Duales LP)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. G sei bipartit, d.h. V kann in Teilmengen V_1 und V_2 partitioniert werden, so dass es nur Kanten zwischen V_1 und V_2 gibt. In diesem Fall ist die Optimallösung des folgenden linearen Programms stets ganzzahlig:

$$\begin{aligned} \max \textstyle\sum_{u \in V} x_u & \\ x_u + x_v \leq 1 & \text{ für alle } uv \in E \\ x_u \geq 0 & \text{ für alle } u \in V. \end{aligned}$$

a) Was berechnet dieses lineare Programm?

b) Formulieren Sie das duale lineare Programm und erläutern Sie, welches Graphenproblem es löst.

C

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

3. Präsenzaufgabenblatt, Wintersemester 2015/16
Übungstunde am 9.11.2015

Aufgabe E (Knapsack-Problem transformieren)

Gegeben sei ein Knapsack-Problem mit den Werten $c_1 = 16, c_2 = 19, c_3 = 23, c_4 = 28$, den Gewichten $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5$ und dem Maximalgewicht 7. Lösen Sie das Problem durch Transformation auf ein Kürzeste-Wege-Problem.

Aufgabe F (Eigenschaften der Most-Vital-Arcs)

Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit positiven ganzzahligen Kantengewichten und seien $s, t \in V$. Ein *vital arc* ist eine Kante, deren Entfernen bewirkt, dass sich die kürzeste Distanz zwischen s und t vergrößert. Ein *most vital arc* ist ein vital arc, dessen Entfernen die kürzeste Distanz zwischen s und t um den größtmöglichen Betrag erhöht. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Ein most vital arc ist eine Kante, deren Gewicht gleich dem Maximum (Minimum) der Gewichte ist.

b) Ein most vital arc ist eine Kante mit maximalem (minimalen) Gewicht auf einem kürzesten Weg zwischen den Knoten s und t.

c) Eine Kante, die nicht Teil eines kürzesten Weges ist, kann kein most vital arc sein.

d) Ein gerichteter Graph kann mehrere most vital arcs enthalten.

Aufgabe G (Algorithmus für Most-Vital-Arcs)

Geben Sie einen Algorithmus an, der einen most vital arc in einem gewichteten Digraph mit vorgegebenen Knoten s und t bestimmt.

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

2. Präsenzaufgabenblatt, Wintersemester 2015/16
Übungstunde am 2.11.2015

Aufgabe C (Durchmesser eines Graphen)

Der *Abstand* $d(u, v)$ zweier Knoten u und v in einem Graphen $G = (V, E)$ ist die kleinste Anzahl von Kanten auf einem Weg von u nach v (bzw. ∞, wenn kein solcher Weg existiert). Der *Durchmesser* von G ist $\max_{u,v \in V} d(u, v)$, also der maximale Abstand zweier Knoten in G.

Entwerfen Sie einen effizienten Algorithmus, der den Durchmesser eines Baumes T bestimmt.

Aufgabe D (MST mit roter Regel)

a) Formulieren Sie einen Algorithmus zur Bestimmung von minimalen aufspannenden Bäumen, der nur die rote Regel verwendet: *Wähle einen Kreis, der keine rote Kante enthält. Bestimme eine längste ungefärbte Kante im Kreis und färbe sie rot.*

b) Analysieren Sie die Laufzeit einer geeigneten Implementierung.

A

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

1. Präsenzaufgabenblatt, Wintersemester 2015/16
Übungstunde am 26.10.2015

Aufgabe A (Laufzeitanalyse, Landau-Symbole)

a) Wie sind $o(f)$, $O(f)$, $\Theta(f)$, $\omega(f)$ und $\Omega(f)$ definiert?

b) Wie analysiert man die Laufzeit einer for-Schleife / einer bedingten Anweisung: *if A then B else C* / der binären Suche?

c) Weshalb kann man die Laufzeitabschätzung $O(E \log V^3)$ stets durch $O(E \log V)$ ersetzen?

Aufgabe B (Euler-Touren)

Das Straßennetz einer Stadt sei als zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ gegeben, in welchem Straßenabschnitte als Kanten und Straßenkreuzungen/ -einmündungen/ -enden als Knoten modelliert sind. Für einen Postboten ist es wünschenswert, alle Straßen entlang gehen zu können, ohne eine mehrmals durchlaufen zu müssen. Er startet seine Tour (Euler-Tour) stets in demjenigen Knoten, in welchem er sie auch beendet (Poststation).

a) Zeigen Sie: Hat jeder Knoten mindestens Grad 2, so gibt es einen Kreis in G.

b) Zeigen Sie: Existiert eine Euler-Tour, so ist jeder Knotengrad gerade. (Die Umkehrung gilt auch.)

c) Bestimmen Sie einen $O(V+E)$-Algorithmus, der eine Euler-Tour in G findet, sofern eine solche existiert.