Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

11. Übungsblatt, Wintersemester 2015/16
Abgabetermin: 19.01.2016

Aufgabe 29

Bestimmen Sie mit der Stepping-Stone-Methode einen Transportplan mit minimalen Kosten für das klassische Transportproblem mit folgenden Eingabedaten: Der Angebotsvektor laute $(9, 4, 8)$, der Bedarfsvektor $(3, 5, 4, 6, 3)$ und die Kostenmatrix sei

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 9 & 10 \\ 2 & 10 & 8 & 30 & 6 \\ 1 & 20 & 7 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie die Startlösung mit der Nordwestecken-Regel.

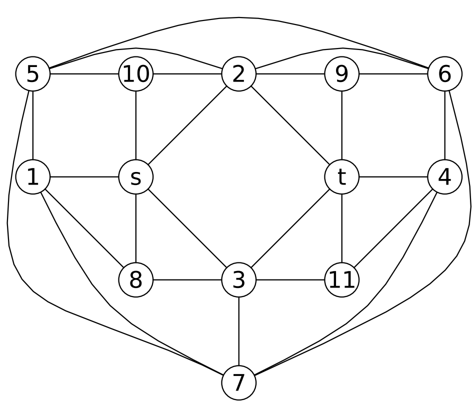
Aufgabe 30

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Durch Multiplikation der Zeilen und Spalten von A mit Skalierungsfaktoren $r \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ soll eine Matrix $A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit den Einträgen $a'_{ij} = r_i \cdot a_{ij} \cdot c_j$ entstehen, deren Einträge in $[-1, 1]$ liegen. Dabei sollen die von 0 verschiedenen Einträge "möglichst nah" an -1 oder 1 liegen. Gesucht ist genauer die Optimallösung des Problems

$$\max \sum_{i,j:(a_{ij}\neq 0)} \log |r_i \cdot a_{ij} \cdot c_j|, \quad s.t. \quad |r_i \cdot a_{ij} \cdot c_j| \leq 1.$$

Zeigen Sie, dass sich das Problem mit Hilfe eines Transportproblems lösen lässt. *Tipps: Formulieren Sie es dazu als Lineares Programm und substituieren Sie dabei ggf. Logarithmen durch neue Variablen. Betrachten Sie schließlich das duale Programm.*

Aufgabe 31



a) Zeichnen Sie den abgebildeten Graphen G so als ebenen Graphen, dass sich der Knoten s am linken, t am rechten, 2 am oberen und 3 am unteren äußeren Rand befindet. Hinweis: Ein mögliches Konstruktionsverfahren wird im Zusatzskript beschrieben.

b) Bestimmen Sie den (s, t)-Knotenzusammenhang $\kappa_G(s, t)$ mit *UppermostPathFirst(G, s, t)*. Zeichnen Sie die dabei gefundenen Wege in die obere Abbildung ein.

c) Ist die Transformation in Teil a) notwendig, damit *UppermostPathFirst* korrekt arbeitet?

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

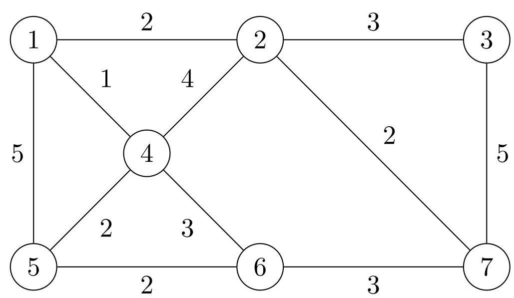
10. Übungsblatt, Wintersemester 2015/16
Abgabetermin: 12.01.2016

Aufgabe 26

Gegeben sei ein zusammenhängender, ungewichteter Graph $G = (V, E)$ und eine ganze Zahl $k \geq 1$. Sei λ der Wert eines kardinalitätsminimalen Schnittes in G. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet der Algorithmus von Karger einen Schnitt, dessen Kardinalität höchstens $k\lambda$ ist?

Aufgabe 27

Bestimmen Sie einen Gomory-Hu-Baum für folgenden Graphen. Bestimmen Sie dabei in jedem Schritt einen minimalen (u, v)-Schnitt (ohne Angabe seiner Konstruktion), wobei erst u und dann v kleinstmöglich gewählt werden. Beginnen Sie also mit einem $(1, 2)$-Schnitt.



Aufgabe 28

Führen Sie die folgenden beiden Probleme jeweils auf das Minimaler-(s, t)-Schnitt-Problem zurück.

a) Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit zwei Kantengewichten c_a und d_a für alle $a \in A$ sowie zwei ausgezeichneten Knoten $s, t \in V$. Gesucht wird eine Knotenmenge $S \subseteq V$ mit $s \in S$ und $t \notin S$, die $\sum_{\delta^+(S)} c_{uv} - \sum_{\delta^-(S)} d_{uv}$ minimiert.

b) Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter, azyklischer Graph mit Kantengewichten c_a für alle $a \in A$. Für eine Knotenmenge $S \subset V$ heißt $\delta^+(S)$ ein *gerichteter Schnitt*, wenn $\emptyset \neq S \neq V$ und $\delta^-(S) = \emptyset$. Gesucht wird ein maximaler gerichteter Schnitt. Tipp: Verwenden Sie Teil a).

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

9. Übungsblatt, Wintersemester 2015/16
Abgabetermin: 22.12.2015

Aufgabe 23

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit positiven Kantengewichten.

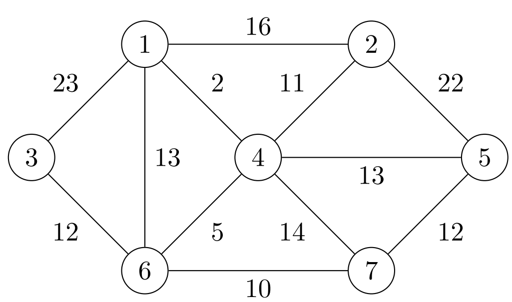
a) Beweisen Sie das Lemma aus der Vorlesung: Für alle Knotenmengen $X, Y \subseteq V$ gilt:

$$c(\delta(X)) + c(\delta(Y)) \geq c(\delta(X \cup Y)) + c(\delta(X \cap Y)).$$

b) Seien $X, Y \subseteq V$ mit $X \cap Y \neq \emptyset$, $X \cup Y \neq V$. Zeigen Sie: Sind $\delta(X)$ und $\delta(Y)$ minimale Schnitte von G, so auch $\delta(X \cup Y)$ und $\delta(X \cap Y)$.

Aufgabe 24

Verwenden Sie den Algorithmus von Nagamochi und Ibaraki, um einen global minimalen Schnitt für den folgenden Graph zu bestimmen. Beginnen Sie dabei jede legale Ordnung mit der kleinstmöglichen Knotennummer.



Aufgabe 25

Betrachten Sie folgende Variationen des randomisierten Algorithmus von Karger.

a) Zunächst werden i Zufallsschrumpfungen nach Karger durchgeführt, für den Restgraph wird der minimale Schnitt exakt berechnet.

b) Zunächst werden i Zufallsschrumpfungen nach Karger durchgeführt, für den Restgraph wird der Algorithmus von Karger zweimal angewandt und das bessere Ergebnis übernommen.

Wie oft muss man die beiden Variationen jeweils ausführen, um zu garantieren, dass der minimale Schnitt mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% gefunden wird? Geben Sie eine exakte Formel sowie eine Tabelle für verschiedene Werte der Knotenzahl n und der Schrumpfungstiefe i an.

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

8. Übungsblatt, Wintersemester 2015/16

Abgabetermin: 15.12.2015

Aufgabe 20

Sei $D = (V, A)$ ein Flussnetzwerk mit Kapazitäten $c(u, v)$ und Mindestflüssen $l(u, v)$ für $(u, v) \in A$. Beweisen Sie das Min-Flow-Max-Cut-Theorem:

$$\min_{(s,t)\text{-Fluss } f} |f| = \max_{(s,t)\text{-Schnitt } (S:T)} \left(\sum_{u \in S, v \in T} l(u, v) - \sum_{u \in S, v \in T} c(v, u) \right).$$

Aufgabe 21

Gegeben sei eine $(p \times q)$-Matrix D mit nichtnegativen ganzzahligen Einträgen d_{ij}. Weiter bezeichne $r(i)$ die i-te Zeilen- und $c(j)$ die j-te Spaltensumme. All diese Summen seien größer als Null. Angenommen, von der Matrix seien nur die Zeilen- und Spaltensummen sowie die Werte für eine Teilmenge Y der Einträge bekannt. Ein Eintrag $d_{ij} \notin Y$ heißt *ungeschützt*, wenn man seinen Wert aus den bekannten Werten schließen kann. Beschreiben Sie einen polynomialen Algorithmus, der alle ungeschützten Einträge sowie ihre Werte bestimmt.

Aufgabe 22

Zu Beginn des Algorithmus *PreflowPush* wird der Quelle s die Starthöhe $|V|$ zugewiesen. Zeigen Sie, dass der Algorithmus korrekt bleibt, wenn s stattdessen die Starthöhe $|V| - 2$ zugewiesen wird.

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

7. Übungsblatt, Wintersemester 2015/16
Abgabetermin: 08.12.2015

Aufgabe 17

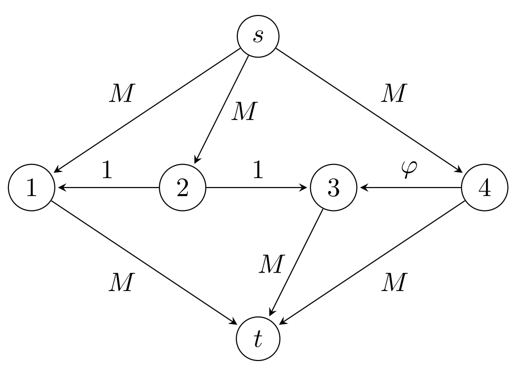
Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ in einem Graphen $G = (V, E)$ heißt *Matching*, falls jeder Knoten in (V, M) höchstens Grad 1 hat. Ist G bipartit mit Partitionsmengen V_1 und V_2, so ist die *Nachbarschaft* einer Menge $S \subseteq V_1$ definiert durch $\delta(S) := \{v_2 \in V_2 \mid \text{es existiert ein } v_1 \in S \text{ mit } v_1v_2 \in E\}$.

Beweisen Sie: G enthält genau dann ein Matching der Kardinalität $|V_1|$, wenn $|\delta(S)| \geq |S|$ für alle $S \subseteq V_1$ gilt. (Tipp: Vollständige Induktion über $|V_1|$.)

Aufgabe 18

Beweisen Sie, dass es zu jedem Flussnetzwerk $D = (V, A)$ eine Folge von höchstens $|A|$ augmentierenden Wegen gibt, durch die ein maximaler Fluss gefunden wird.

Aufgabe 19



Gegeben sei das obige Netzwerk mit Kapazitäten. Dabei sei M eine hinreichend große Zahl und $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

a) Es seien die (s,t)-Wege $P_0 = (s, 2, 3, t)$, $P_1 = (s, 4, 3, 2, 1, t)$, $P_2 = (s, 2, 3, 4, t)$ und $P_3 = (s, 1, 2, 3, t)$ gegeben. Zeigen Sie: Im Ford-Fulkerson-Algorithmus ist es möglich, die Folge

$$P_0, \quad P_1, P_2, P_1, P_3, \quad P_1, P_2, P_1, P_3, \quad \ldots$$

als augmentierende Wege auszuwählen; insbesondere terminiert der Algorithmus bei dieser Wahl also nicht. Betrachten Sie hierzu die Entwicklung der Restkapazitäten der Kanten $(2, 1), (2, 3)$ und $(4, 3)$ und benutzen Sie die Identität $1 - \varphi = \varphi^2$, um diese als Potenzen von φ zu schreiben, sofern möglich.

b) Gegen welchen Wert konvergiert die Folge der Flusswerte? Welchen Wert hat ein maximaler (s,t)-Fluss?

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

6. Übungsblatt, Wintersemester 2015/16
Abgabetermin: 01.12.2015

Aufgabe 14

Bestimmen Sie mit der Ungarischen Methode eine Zuordnung minimalen Gewichts für die folgende Kostenmatrix und geben Sie dabei alle wesentlichen Zwischenschritte an.

$$\begin{pmatrix} 21 & 35 & 12 & 26 & 30 & 11 \\ 34 & 18 & 21 & 6 & 22 & 27 \\ 3 & 8 & 24 & 28 & 12 & 14 \\ 3 & 20 & 25 & 22 & 16 & 11 \\ 15 & 4 & 8 & 16 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 32 & 9 & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 15

Sei $G = (V, E)$ ein vollständiger bipartiter Graph mit zwei gleich großen, disjunkten Knotenpartitionen $A \subset V$ und $B = V \setminus A$. Jedem Knoten $i \in A$ (bzw. $j \in B$) sei ein Gewicht $a_i > 0$ (bzw. $b_j > 0$) zugeordnet und für die Kantengewichte gelte $c_{ij} = a_i b_j$ für alle $ij \in E$. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der ein perfektes Matching mit minimalem Gesamtgewicht bestimmt und beweisen Sie seine Korrektheit.

Aufgabe 16

Gegeben sei ein bipartiter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten c_{ij} für $ij \in E$. Es sei k die Anzahl der verschiedenen Werte der Gewichte, also $k \leq |E|$. Außerdem sei eine Subroutine `findAssignment`(E') mit der Laufzeit $O(\sqrt{V}E')$ bekannt, die für jede Kantenmenge $E' \subseteq E$ eine Zuordnung findet, die nur Kanten aus E' enthält oder ausgibt, dass keine solche Zuordnung existiert.

Geben Sie einen Algorithmus an, der das *Balanced-Assignment-Problem* in der Zeit $O(k \cdot \sqrt{V}E)$ optimal löst. Gesucht ist hier eine Zuordnung, in der die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten vorkommenden Gewicht möglichst klein ist.

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

5. Übungsblatt, Wintersemester 2015/16
Abgabetermin: 24.11.2015

Aufgabe 11

Formulieren Sie die folgenden Probleme aus der Vorlesung als lineare Programme mit Ganzzahligkeitsbedingung an die Variablen.

a) Maximales-Branching-Problem

b) Maximales-Aboreszenz-Problem

Aufgabe 12

Betrachten Sie das Kürzester-(s, t)-Weg-Problem mit nicht-negativen Kantengewichten.

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm mit Ganzzahligkeitsbedingung an die Variablen.

b) Formulieren Sie das duale Problem zum linearen Programm aus a) ohne Ganzzahligkeitsbedingung. Interpretieren Sie die Bedeutung seiner Variablen.

Aufgabe 13

Formulieren Sie die Min-Max- und die Max-Min-Bottleneck-Variante des minimalen (s, t)-Wegs jeweils als lineares Programm mit Ganzzahligkeitsbedingung an die Variablen. Beachten Sie dabei, dass die Kantengewichte nicht positiv sein müssen.

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

4. Übungsblatt, Wintersemester 2015/16

Abgabetermin: 17.11.2015

Aufgabe 8

Gegeben seien Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, die aufsteigend sortiert sind, d.h. es gilt $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Sei $p \in \mathbb{N}$. Gesucht ist eine Partitionierung dieser Werte in Cluster mit folgenden Eigenschaften:

- Jedes Cluster enthält mindestens p Werte.
- Jedes Cluster enthält nur aufeinanderfolgende Werte aus der Liste $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- Die Summe der quadratischen Abweichungen der Werte von den Mittelwerten ihrer Cluster soll so klein wie möglich sein. Sei $\bar{a}(S)$ der Mittelwert von Cluster S. Dann ist die quadratische Abweichung eines Wertes a_i vom Mittelwert seines Cluster definiert durch $(a_i - \bar{a}(S))^2$.

Formulieren Sie dieses Problem als ein Kürzeste-Wege-Problem und veranschaulichen Sie Ihre Lösung mit den folgenden Daten: $p = 2$, $n = 6$, $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.8$, $a_3 = 1.1$, $a_4 = 1.5$, $a_5 = 1.6$, $a_6 = 2.0$.

Aufgabe 9

Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit in $O(V^3)$ an, der in einem gerichteten Graphen mit nicht-negativen Kantengewichten einen zweitkürzesten Weg zwischen zwei vorgegebenen Knoten findet. Beweisen Sie dessen Korrektheit. Beachten Sie dabei, dass die Längen von kürzestem und zweitkürzestem Weg übereinstimmen können.

Aufgabe 10

Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der in einem gerichteten Graph mit n Knoten und reellen Kantengewichten aus dem Intervall $(n-3, n-1]$ kürzeste Wege von einem Knoten $s \in V$ aus zu allen anderen Knoten berechnet. Beweisen Sie seine Korrektheit.

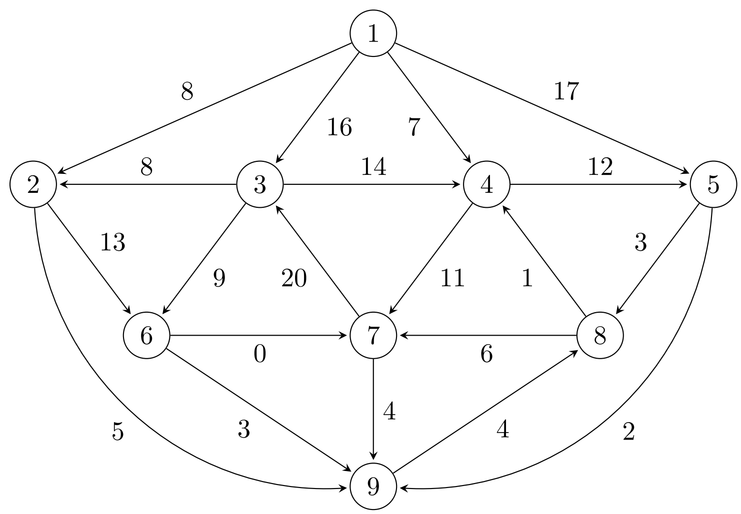
Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

3. Übungsblatt, Wintersemester 2015/16
Abgabetermin: 10.11.2015

Aufgabe 6

Wenden Sie einen Algorithmus zur Bestimmung eines maximales Branchings auf den folgenden Digraphen an. Geben Sie dabei so viele Zwischenschritte an, dass Ihr Lösungsweg nachvollziehbar wird.



Aufgabe 7

Geben Sie einen Algorithmus an, der zu einem gewichteten Digraph eine minimale Arboreszenz mit vorgegebener Wurzel berechnet.

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

2. Übungsblatt, Wintersemester 2015/16
Abgabetermin: 3.11.2015

Aufgabe 4

Für einen Graphen $G = (V, E)$ mit Kantengewichten c_e sei ein minimaler aufspannender Baum T gegeben. Zu V werde ein Knoten v und zu E gewichtete Kanten hinzugefügt, die inzident zu v sind. Gesucht ist ein minimaler aufspannender Baum für den erweiterten Graphen. Kann man T dazu effizient verwenden?

Aufgabe 5

Sei $G = (V, E)$ ein gewichteter Graph. Seien T_1 und T_2 zwei minimale aufspannende Bäume in G.

a) Beweisen Sie, dass das maximale Kantengewicht in T_1 und T_2 gleich groß ist.

b) Gesucht ist ein aufspannender Baum T in G, dessen maximales Kantengewicht möglichst klein ist. Beweisen Sie, dass hierfür jeder MST-Algorithmus verwendet werden kann.

c) Seien L_1 und L_2 die sortierten Listen der Kantengewichte von T_1 bzw. T_2. Beweisen Sie, dass $L_1 = L_2$ gilt.

Prof. Dr. Gerhard Reinelt
Dipl.-Math. Stefan Wiesberg
Institut für Informatik
Universität Heidelberg

Effiziente Algorithmen I

1. Übungsblatt, Wintersemester 2015/16
Abgabetermin: 27.10.2015

Falls nicht anders angegeben, seien Graphen *auf den folgenden Übungsblättern stets als schleifenfrei und ohne Mehrfachkanten anzunehmen. Laufzeitanalysen sollen stets nach dem Einheitskosten-Modell erfolgen. Die Lösungen können in Gruppen aus bis zu drei Personen eingereicht werden.*

Aufgabe 1

Ein ungerichteter Graph heißt *Baum*, wenn er zusammenhängend ist und keine Kreise enthält. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Beweisen Sie:

a) G ist genau dann ein Baum, wenn es in G für jedes Paar (u, v) von verschiedenen Knoten genau einen Pfad von u nach v gibt.

b) G ist genau dann ein Baum, wenn G zusammenhängend ist und $|E| = |V| - 1$ gilt.

Aufgabe 2

Zu einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $G^2 = (V, E^2)$ wie folgt definiert: Es ist genau dann $uv \in E^2$, wenn es einen Knoten $w \in V$ gibt mit $uw \in E$ und $vw \in E$. Beachten Sie, dass G^2 demnach Schleifen enthalten kann. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der G^2 berechnet, wenn ...

a) G als Adjazenzmatrix gegeben ist.

b) G als Adjazenzliste gegeben ist.

Aufgabe 3

Eine *Senke* ist ein Knoten eines gerichteten Graphen $D = (V, A)$ mit Eingangsgrad $|V| - 1$ und Ausgangsgrad 0. Sei D durch seine Adjazenzmatrix gegeben. Zeigen Sie, dass in der Zeit $O(V)$ festgestellt werden kann, ob D eine Senke enthält.